Para maximizar la utilidad hacemos $dP/dx = 0$ y resolvemos. Esto da $x = 975$ como el único punto crítico a considerar. Éste proporciona un máximo, como puede verificarse por medio del criterio de la primera derivada. La utilidad máxima es $P(975) = \$1898.25$. ■

Observe que en $x = 975$ tanto el ingreso como el costo marginales son \$1.10. En general, una compañía debe esperar el nivel de utilidad máxima cuando el costo de producir una unidad adicional es igual al ingreso proveniente de esa unidad.

## Revisión de conceptos

**1.** Si un rectángulo de área 100 tiene largo $x$ y ancho $y$, entonces los valores admisibles para $x$ son ______.

**2.** El perímetro $P$ del rectángulo de la pregunta 1 expresado en términos (sólo) de $x$ está dado por $P =$ ______.

**3.** La recta de mínimos cuadrados que pasa por el origen minimiza $S = \sum_{i=1}^{n} (\_\_\_\_\_)^2$

**4.** En economía, $\frac{dR}{dx}$ se denomina ______ y $\frac{dC}{dx}$ se denomina ______.

## Conjunto de problemas 3.4

**1.** Encuentre dos números cuyo producto sea $-16$ y cuya suma de sus cuadrados sea mínima.

**2.** ¿Para qué número la raíz cuadrada principal excede en la mayor cantidad posible a ocho veces el número?

**3.** ¿Para qué número la raíz cuarta principal excede en la mayor cantidad posible al doble del número?

**4.** Encuentre dos números cuyo producto sea $-12$ y la suma de sus cuadrados sea mínima.

**5.** Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cerca al punto $(0, 5)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre $(x, y)$ y $(0, 5)$.

**6.** Encuentre los puntos sobre la parábola $x = 2y^2$ que estén más cerca al punto $(10, 0)$. *Sugerencia:* minimice el cuadrado de la distancia entre $(x, y)$ y $(10, 0)$.

**7.** ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad? Comience por convencerse de que este número está en el intervalo $[0, 1]$.

**8.** Muestre que para un rectángulo de perímetro dado $K$, aquel de área máxima es un cuadrado.

**9.** Determine el volumen de la mayor caja abierta que pueda fabricarse con una pieza de cartón de 24 pulgadas cuadradas, recortando cuadrados iguales a partir de las esquinas y doblando hacia arriba los lados (véase el ejemplo 1).

≈ **10.** Un granjero tiene 80 pies de malla de alambre con la cual planea encerrar un corral rectangular a un lado de su establo de 100 pies de largo, como se muestra en la figura 18 (el lado a lo largo del establo no necesita valla). ¿Cuáles son las dimensiones del corral que tiene área máxima?

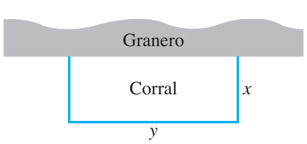


Figura 18

≈ **11.** El granjero del problema 10 decide hacer tres corrales idénticos con sus 80 pies de malla de alambre, como se muestra en la figura 19. ¿Qué dimensiones del área total encerrada hacen el área de los corrales tan grande como sea posible?

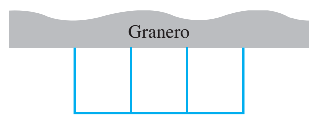


Figura 19

**12.** Suponga que el granjero del problema 10 tiene 180 pies de cerca de alambre y quiere que el corral quede contiguo a todo el lado del establo de 100 pies, como se muestra en la figura 20. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para tener área máxima? Observe que en este caso $0 \le x \le 40$.

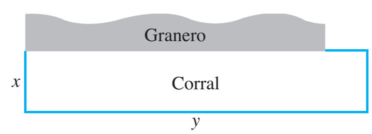


Figura 20

**13.** Un granjero desea cercar dos corrales rectangulares idénticos, cada uno con un área de 900 pies cuadrados, como se muestra en la figura 21. ¿Cuáles son los valores de $x$ y $y$, de modo que se requiera la menor cantidad de valla?

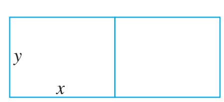


Figura 21

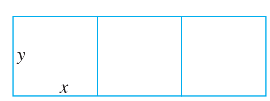


Figura 22

**14.** Un granjero desea cercar tres corrales rectangulares adyacentes idénticos (véase la figura 22), cada uno con un área de 300 pies cuadrados. ¿Cuáles deben ser el ancho y el largo de cada corral, de modo que se ocupe la menor cantidad de valla?

**15.** En el problema 14, suponga que la cerca exterior de los corrales requiere una valla más firme que cuesta \$3 por pie, pero que las dos particiones internas necesitan una cerca que cuesta sólo \$2 por pie. ¿Qué dimensiones de $x$ y $y$ producirán el costo más económico para los corrales?

**16.** Resuelva el problema 14, suponiendo que el área de cada corral es de 900 pies cuadrados. Estudie la solución de éste y del problema 14; además, haga una conjetura acerca de la razón $x/y$ en todos los problemas de este tipo. Demuestre su conjetura.

**17.** Determine los puntos $P$ y $Q$ en la curva $y = x^2/4, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, que están más cerca y más lejos del punto (0, 4). *Sugerencia:* el álgebra es más sencilla si considera el cuadrado de la distancia requerida en lugar de la distancia misma.

**18.** Un cono circular recto será inscrito en otro cono circular recto de volumen dado, con los mismos ejes y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. ¿Cuál debe ser la razón entre sus alturas para que el cono inscrito tenga volumen máximo?

≈ **19.** Una pequeña isla está a 2 millas del punto más cercano, $P$, de una playa rectilínea de un gran lago. Si una mujer en la isla puede remar en una lancha a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora, ¿en dónde debe desembarcar en el bote para llegar, en el menor tiempo, a un pueblo que está a 10 millas, medidas sobre la playa, del punto $P$?

≈ **20.** En el problema 19 suponga que, cuando llegue a la playa, la mujer será recogida por un automóvil que promedia 50 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

≈ **21.** En el problema 19, suponga que la mujer utiliza una lancha de motor, que viaja a 20 millas por hora. Entonces, ¿en dónde debe desembarcar?

**22.** Una central eléctrica está situada en una ribera de un río rectilíneo que tiene $w$ pies de ancho. Una fábrica está situada en la ribera opuesta del río, $L$ pies río abajo del punto $A$, que está enfrente a la central eléctrica. ¿Cuál es la ruta más económica para conectar un cable de la central a la fábrica, si cuesta $a$ dólares por pie tender el cable bajo el agua y $b$ dólares por pie en tierra ($a > b$)?

**23.** A las 7:00 a. m., un barco estaba a 60 millas al este de un segundo barco. Si el primer barco navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo navega con rumbo sureste a 30 millas por hora, ¿cuándo estarán más cerca uno del otro?

**24.** Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y que forma con los ejes de coordenadas el triángulo con menor área posible ($a$ y $b$ son constantes positivas).

**25.** Encuentre el volumen máximo que puede tener un cilindro circular recto, si está inscrito en una esfera de radio $r$.

**26.** Demuestre que el rectángulo con perímetro máximo que puede inscribirse en un círculo es un cuadrado.

**27.** ¿Cuáles son las dimensiones de un cilindro circular recto, con mayor área de superficie, que puede inscribirse en una esfera de radio $r$?

**28.** La iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente luminosa y directamente proporcional a la intensidad de la fuente. Si dos fuentes luminosas están separadas $s$ pies y sus intensidades son $I_1$ e $I_2$, respectivamente, ¿en qué punto entre ellas la suma de sus iluminaciones será mínima?

**29.** Un alambre de 100 centímetros de largo se corta en dos pedazos; uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿En dónde debe hacerse el corte si (a) la suma de las dos áreas debe ser mínima; (b) máxima? (Cabe la posibilidad de no cortar).

**30.** Una caja cerrada en forma de paralelepípedo rectangular con base cuadrada tiene un volumen dado. Si el material utilizado para el fondo cuesta 20% más por pulgada cuadrada que el material para los lados y el material de la tapa cuesta 50% más por pulgada cuadrada que cada lado, encuentre las proporciones más económicas para la caja.

**31.** Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, coronado por un domo semiesférico. Si el domo semiesférico cuesta el doble por pie cuadrado que las paredes cilíndricas, ¿cuáles son las proporciones más económicas para un volumen dado?

**32.** Una masa conectada a un resorte se mueve a lo largo del eje $x$, de modo que su abscisa en el instante $t$ es

$$x = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{3} \cos 2t$$

¿Cuál es la mayor distancia del origen que alcanza la masa?

**33.** Una jardinera tendrá la forma de un sector circular (una región en forma de rebanada de pastel) de radio $r$ y ángulo en el vértice de $\theta$. Encuentre $r$ y $\theta$, si su área, $A$, es constante y el perímetro es mínimo.

**34.** Una barda de $h$ pies de altura corre paralela a un edificio alto y a $w$ pies de él (véase la figura 23). Encuentre la longitud de la escalera más corta que llegue del suelo hasta la pared del edificio, pasando por encima de la barda.

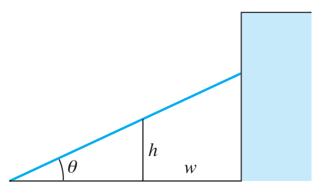

Figura 23

**35.** Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje $x$ y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$ (véase la figura 24). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de este tipo con área máxima?

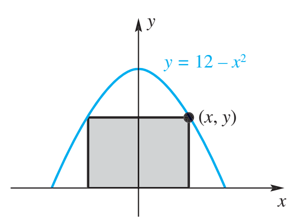

Figura 24

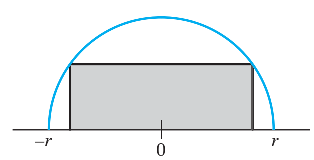

Figura 25

**36.** Un rectángulo se inscribirá en un semicírculo de radio $r$, como se muestra en la figura 25. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo, si su área debe maximizarse?

**37.** De todos los cilindros circulares rectos con un área de superficie dada, determine aquel con el volumen máximo. *Observación:* los extremos de los cilindros son cerrados.

**38.** Determine las dimensiones del rectángulo con mayor área que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

**39.** De todos los rectángulos con una diagonal dada, determine aquel con el área máxima.